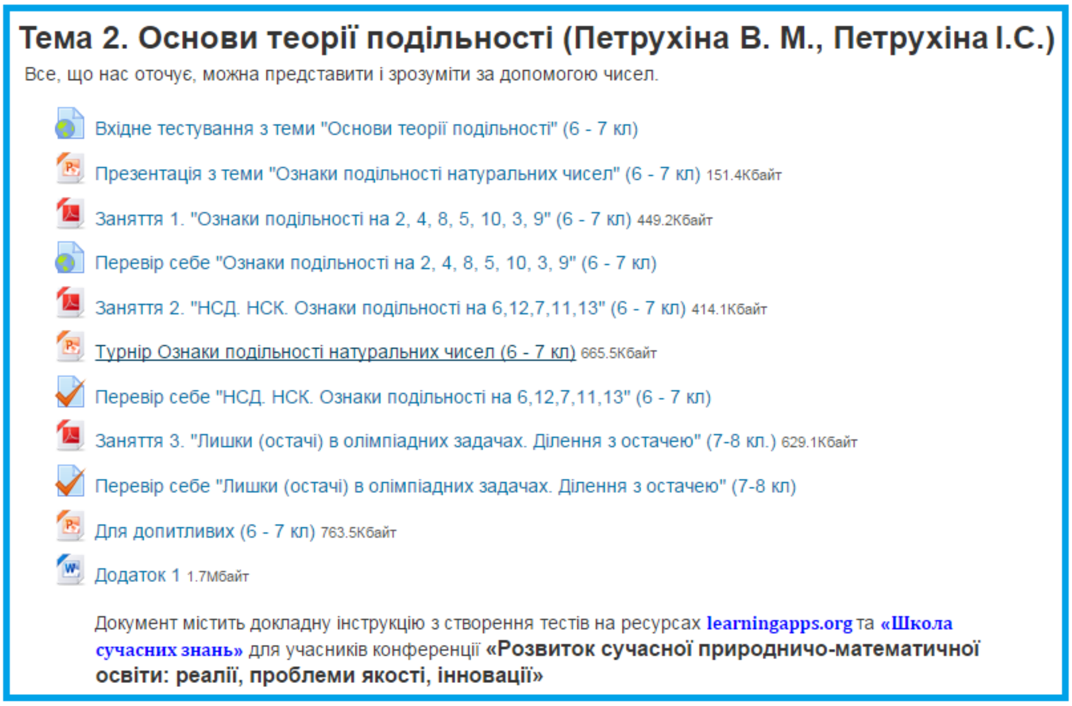
Основи теорії подільності

Петрухіна Валентина Миколаївна,
вчитель математики
Мелітопольської ЗОШ І-ІІІ ступенів №14,
спеціаліст вищої категорії, вчитель-методист

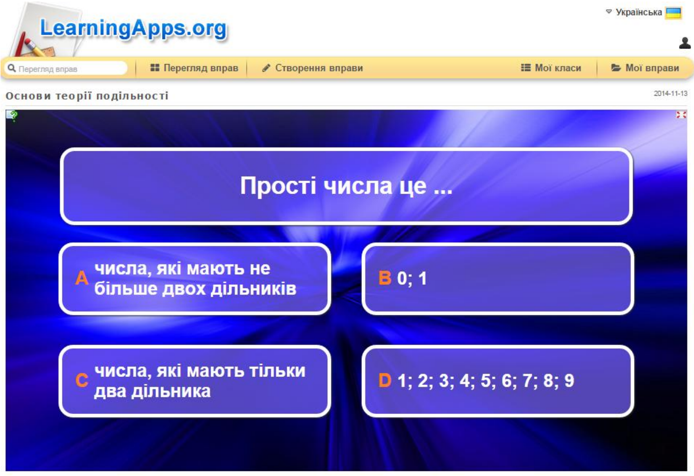
З матою підготовки учнів до олімпіад учитель прагне розширити кругозір учня, та поглибити його рівень знань. Одним з таких способів, який допомагає вчителю виконати поставлену задачу є самостійна підготовка учнів на платформі «Школа сучасних знань».

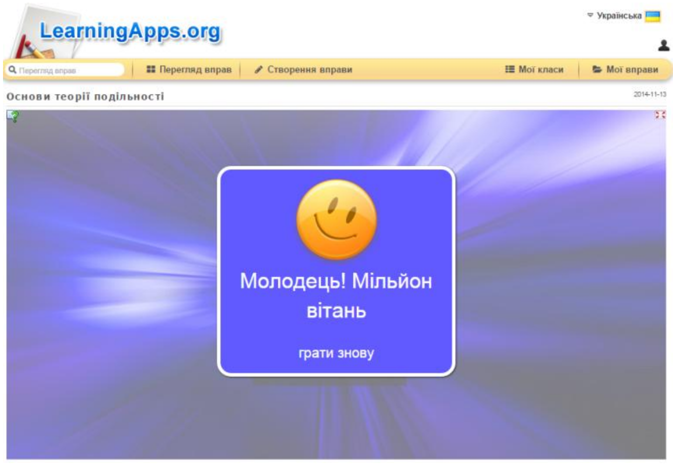
Говорячи про важливу роль теорії подільності чисел в математичному вихованні, А.І. Маркушевич зауважив, що ця теорія є одним з небагатьох розділів математичної науки в (даному випадку теорія чисел), з яким можна без будь-яких скорочень і пропусків, зі всіма необхідними кінцевими визначеннями і доведеннями ознайомити учнів. Цей розділ – логічно стрункий і завершений, розвертаючись ланцюжком невеликої кількості достатньо простих теорем, дає можливість підвести учнів до розуміння теореми Евкліда про існування як завгодно великих простих чисел, алгоритму Ератосфена побудови таблиці простих чисел, алгоритму Евкліда для відшукання найбільшого спільного дільника і застосування цих знань до розв'язування в цілих числах лінійних рівнянь, і нарешті, до розуміння теореми про єдиність розкладу цілого числа на прості множники. Вказані твердження і методи є фундаментом теорії чисел і в той же ж самий час є найпростішими доступними учню прикладами теорем існування і єдиності і прикладами найпростіших алгоритмів без чого немислимо створити правильне уявлення про математичну науку.

Тема «Ознаки подільності» вивчається в 6 класі на доступному рівні для всіх учнів. Пропонуємо учням поглибити рівень власних знань за допомогою індивідуального навчання.



Наскільки учень готовий до вивчення складнішого матеріалу, можливо з'ясувати за допомогою вхідного тестування на знання матеріалу шкільної програми. Тест створений на ресурсі **http://learningapps.org/** у вигляді гри «Хто хоче стати мільйонером?». Тест містить 10 завдань, порядок яких постійно змінюється з 4 можливими відповідями, одна з яких правильна і кожен раз змінює своє місцезнаходження. Якщо учень успішно тестування, то він переходить до вивчення нового матеріалу:



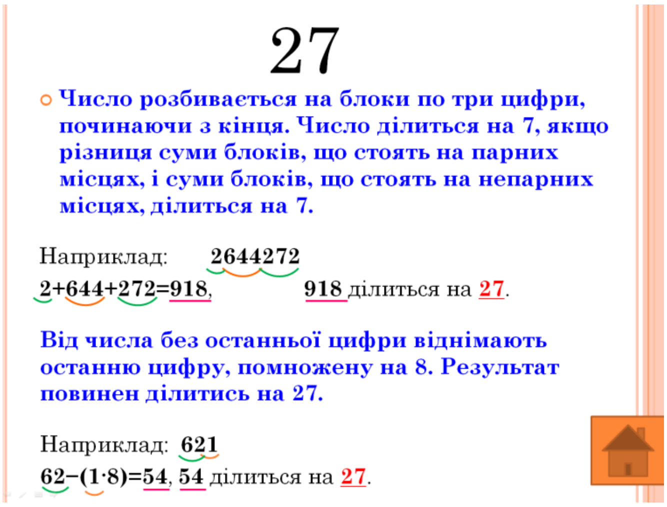


Задача вчителя полягає в тому, щоб зацікавити учнів самостійно працювати з ресурсом «Школа сучасних знань». З цією метою рекомендуємо провести «Турнір» між учнями, які бажають додатково вивчати математику:

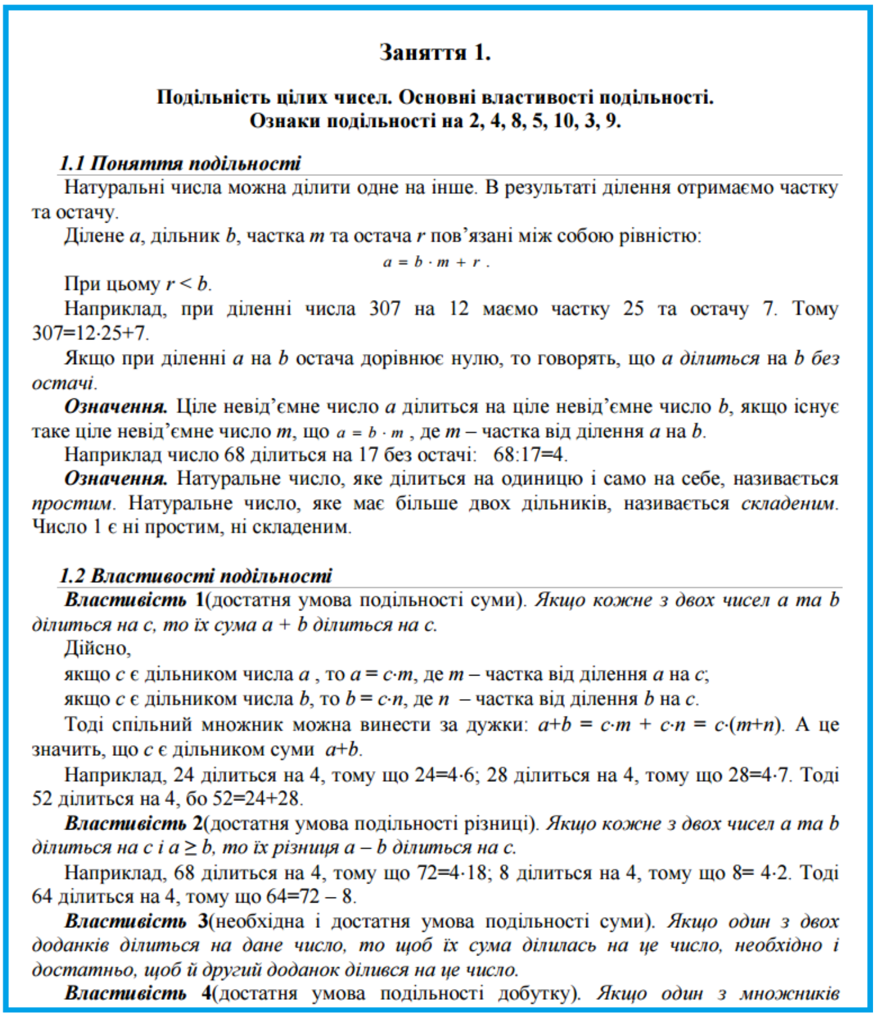
Ще М.Горький говорив "Гра супутник людського життя з раннього дитинства і до глибокої старості". Тому маємо надію, що граючи учні будуть навчатися охочіше.

З'ясувати які ознаки подільності ще існують можна за допомогою презентації, яка містить 27 ознак.

Учень знайомиться з ознаками подільності, які не вивчаються в шкільному курсі математики. Наприклад, ознака подільності на 27.



Для більш докладного вивчення матеріалу необхідно перейти до самих занять. Тема «Основи теорії подільності» містить 3 заняття, які розкривають теоретичний матеріал та дають можливість учню розглянути задачі з покроковим поясненням. Заняття 1 містить теоретичний матеріал та задачі зі зростаючим рівнем складності:



Заняття 1.

Подільність цілих чисел. Основні властивості подільності.
Ознаки подільності на 2, 4, 8, 5, 10, 3, 9.

1.1 Поняття подільності

Натуральні числа можна ділити одне на інше. В результаті ділення отримаємо частку та остачу.

Ділене a, дільник b, частка m та остача r пов'язані між собою рівністю:

$$a = b \cdot m + r .$$

При цьому $r < b$.

Наприклад, при діленні числа 307 на 12 маємо частку 25 та остачу 7. Тому 307=12·25+7.

Якщо при діленні a на b остача дорівнює нулю, то говорять, що *a ділиться* на b *без остачі*.

Означення. Ціле невід'ємне число a ділиться на ціле невід'ємне число b, якщо існує таке ціле невід'ємне число m, що $a = b \cdot m$, де m – частка від ділення a на b.

Наприклад число 68 ділиться на 17 без остачі: 68:17=4.

Означення. Натуральне число, яке ділиться на одиницю і само на себе, називається *простим*. Натуральне число, яке має більше двох дільників, називається *складеним*. Число 1 є ні простим, ні складеним.

1.2 Властивості подільності

***Властивість* 1**(достатня умова подільності суми). *Якщо кожне з двох чисел a та b ділиться на c, то їх сума $a + b$ ділиться на c.*

Дійсно,

якщо c є дільником числа a , то $a = c{\cdot}m$, де m – частка від ділення a на c;

якщо c є дільником числа b, то $b = c{\cdot}n$, де n – частка від ділення b на c.

Тоді спільний множник можна винести за дужки: $a+b = c{\cdot}m + c{\cdot}n = c{\cdot}(m+n)$. А це значить, що c є дільником суми $a+b$.

Наприклад, 24 ділиться на 4, тому що 24=4·6; 28 ділиться на 4, тому що 28=4·7. Тоді 52 ділиться на 4, бо 52=24+28.

***Властивість* 2**(достатня умова подільності різниці). *Якщо кожне з двох чисел a та b ділиться на c і $a \geq b$, то їх різниця $a - b$ ділиться на c.*

Наприклад, 68 ділиться на 4, тому що 72=4·18; 8 ділиться на 4, тому що 8= 4·2. Тоді 64 ділиться на 4, тому що 64=72 – 8.

***Властивість* 3**(необхідна і достатня умова подільності суми). *Якщо один з двох доданків ділиться на дане число, то щоб їх сума ділилась на це число, необхідно і достатньо, щоб й другий доданок ділився на це число.*

***Властивість* 4**(достатня умова подільності добутку). *Якщо один з множників*

Після вивчення матеріалу, учень може перевірити свої знання за допомогою тесту, який створений на ресурсі **http://learningapps.org/** у вигляді вікторини з вибором однієї правильної відповіді. Тест містить 5 завдань, порядок яких постійно змінюється з 4 можливими відповідями, правильна відповідь кожен раз змінює своє місцезнаходження:

Заняття 2 містить теоретичний матеріал та задачі зі зростаючим рівнем складності:

Заняття 2.

НСД, НСК. Ознаки подільності на 6, 12, 7, 11, 13.

2.1 Найбільший спільний дільник і способи його знаходження.

Означення. Дільником числа називають таке число, на яке дане число ділиться без остачі (націло).

Наприклад, число 9 є дільником числа 81, а число 13 – дільником числа 26.

Означення. Найбільшим спільним дільником (НСД) декількох чисел називають найбільше число, на яке кожне з даних чисел ділиться без остачі.

Для знаходження найбільшого спільного дільника чисел *a* і *b* (НСД (a; b)) потрібно:

1. Знайти всі дільники числа *a* і всі дільники числа *b*.
2. Знайти спільні дільники чисел *a* і *b*, тобто дільники, які є дільниками кожного з чисел *a* і *b*.
3. Обчислити добуток всіх спільних дільників, беручи кожен з множників з найменшим показником.

Результат записати у вигляді НСД (a; b)

Другий спосіб знаходження НСД пов'язаний з давньогрецьким математиком Евклідом, який виклав у 7 книзі своїх «Начал». Цей спосіб легший, доступніший і більше подобається дітям.

Знаходження НСД чисел розкладанням на прості множники нерідко буває занадто громіздким. Існує спосіб, який дозволяє з меншими труднощами знаходити НСД.

Алгоритм Евкліда:

Алгоритм Евкліда ітеративний, тобто, пошук розв'язку відбувається за декілька кроків; вихідні дані попереднього кроку служать вхідними для наступного. Нехай k – ціле число, що дорівнює кількості виконаних кроків, починаючи з 0. Кожен крок починається з двома невід'ємними залишками r_{k-1} та r_{k-2}. Оскільки алгоритм гарантує, що залишки постійно зменшуватимуться на кожному кроці, r_{k-1} менше за попередній залишок r_{k-2}. Задачею кроку *k* є пошук частки *qk* та залишку *rk*, що задовольняють рівняння:

Алгоритм Евкліда для знаходження НСД (m;n)

Розглянутий спосіб знаходження НСД(m;n) за допомогою розкладання даних чисел на прості множ-ники достатньо простий, легкий і зручний. Але він має суттєвий недолік: якщо дані числа великі, та ще й не дуже легко розкладаються на множники, то знайти НСД стає досить складною. До того ж, доволі попрацювавши, ми можемо дістати, що НСД(m;n)=1, і тоді вся робота виконана марно.

Евклід знайшов чудовий спосіб знаходження НСД без попереднього опрацювання чисел. Цей спосіб називають алгоритмом Евкліда.

Перевірка знань здійснюється за допомогою тесту на множинний вибір, який створений засобами ресурсу «Школа сучасних знань». Тест містить 5 завдань, порядок яких постійно змінюється:

Завдання 1
Ще немає відповіді
Оцінено в 1,00
Відмітити тестового завдання
Редагувати тестове завдання

Знайти число $\overline{173xy4}$, якщо відомо, що воно ділиться на 36.

Оберіть одну або більше:

- [x] 17784
- [x] 17064
- [x] 17424
- [ ] 17847
- [x] 17244
- [x] 17964
- [ ] 17946
- [x] 17604
- [ ] 17046
- [ ] 17406
- [ ] 17442

Заняття 3 містить теоретичний матеріал та задачі зі зростаючим рівнем складності:

Заняття 3.

Лишки (остачі) в олімпіадних задачах. Ділення з остачею.

3.1.Ділення з остачею. Лишки(остачі) в олімпіадних задачах.

Основні теоретичні відомості

Означення. Поділити з остачею число $\boldsymbol{a}$ на число $\boldsymbol{b}$ (число $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ натуральні числа) – означає знайти таке натуральне число $\boldsymbol{q}$ і таке ціле $0 \le r < b$, що $a = b\,q + r$

При цьому число $\boldsymbol{q}$ називається неповною часткою, а число $\boldsymbol{r}$ – остачею від ділення $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$. При $r = 0$ ділення з остачею є ділення націло.

Будь-яке натуральне число $\boldsymbol{a}$ при довільному вибраному натуральному $k > 1$ можна однозначно подати якоюсь однією з наступних $\boldsymbol{k}$ формул при належному виборі цілого невід'ємного $\boldsymbol{n}$.

$a = k\,n$

$a = k\,n + 1$

…………

$a = k\,n + (k - 1)$

Якщо при діленні чисел a_1, a_2 на число $\boldsymbol{b}$ одержують остачі r_1, r_2,то остача від ділення на $\boldsymbol{b}$ суми $a_1 + a_2$ (відповідно добутку $a_1 \cdot a_2$) дорівнює остачі від ділення на $\boldsymbol{b}$ суми $r_1 + r_2$ (відповідно добутку $r_1 \cdot r_2$) остач r_1, r_2.

Задача 1. Довести, що сума чотирьох послідовних парних чисел не ділиться на 8 .

Розв'язання. Нехай перше з парних чисел буде $2k$. Наступні числа: $2k+2$; $2k+4$; $2k+6$.

Сума: $8k+12$. При діленні цієї суми на 8 одержуємо неповну частку $k+1$ та остачу 4. Отже, націло на 8 ця сума не ділиться, що й треба було довести.

Задача 2. Довести, що при жодному натуральному $\boldsymbol{n}$ число $7n+5$ не може бути квадратом іншого натурального числа (точним квадратом).

Розв'язання. Кожне натуральне число можна записати в одній із таких форм (при певному $k \ge 0$):

$7k;\ 7k+1;\ 7k+2;\ 7k+3;\ 7k+4;\ 7k+5;\ 7k+6.$

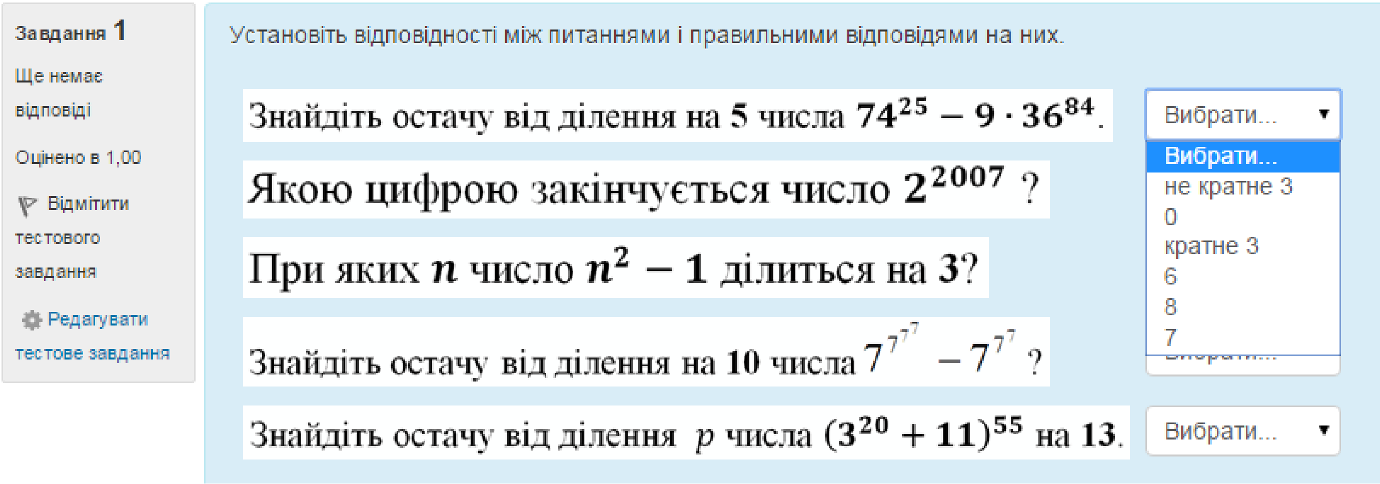
В загальному вигляді $7k+m$, де $\boldsymbol{m}$ набуває значень $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

Квадрати цих чисел мають вигляд: $49k^2+14km+m^2$. При діленні на 7 цих квадратів останні збігатимуться з остачами від ділення чисел m^2 на 7 і відповідно будуть дорівнювати 1; 4; 2; 2; 4; 1.

Але задане число $7n+5$ при діленні на 7 дає остачу 5, отже, воно не може бути квадратом натурального числа.

Задача 3. Довести, що число $2^{70}+3^{70}$ ділиться на 13.

Перевірка знань здійснюється за допомогою тесту на відповідність, який створений засобами ресурсу «Школа сучасних знань». Тест містить 5 завдань, порядок яких постійно змінюється:



Також у темі міститься додатковий матеріал «Для допитливих» - історичні відомості у виді презентації.

Тема ще не повністю розкрита, тому буде згодом доповнена.

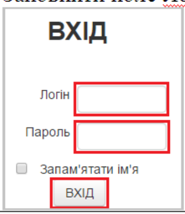
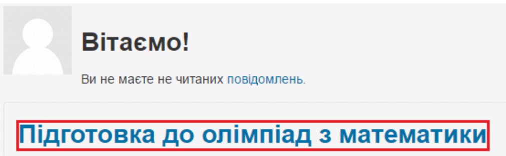
Маємо надію, що напрацьований матеріал допоможе учня, а також вчителям при проведенні «Тижня математики» та факультативів.

Ти лише до тих пір
Здатний сприяти освіті інших,
Доки продовжуєш працювати
Над власною освітою

А. Дістервег

Запрошую вас до практичного заняття «Створення тесту на ресурсі **http://learningapps.org/ «Хто чоже стати мільйонером?»** ». На допомогу вам рекомендую скористатися отриманим буклетом з покроковою інструкцією створення даного тесту. Також ви можете знайти рекомендації до створення тесту на множинний вибір засобами ресурсу «Школа сучасних знань» у «Додаток 1», приєднаному до теми «Основи теорії подільності»:

Створення тестів на ресурсі: **«Школа сучасних знань»**

№	Дія
1	Ввести в адресному рядку браузеру **http://www.zhu. edu.ua /mk_school/**
2	Натиснути «ВХІД» в правій верхній частині вікна, що відкрилося Ви не пройшли ідентифікацію (ВХІД)
3	Заповнити поле Логін та Пароль і натиснути клавішу «ВХІД» 
4	Натиснути на посиланні курсу, на який Ви підписані «Підготовка до олімпіад з математики» 
5	В верхньому правому куті обрати «Включити редагування» Включити редагування

Бажаю всім творчих успіхів та нових звершень!